

# Mimostředný tah a tlak, jádro průřezu

## Teorie

Při mimostředném tahu a tlaku je průřez namáhán normálovou silou  $N$  a ohybovými momenty  $M_y$  a  $M_z$ .

Jiným vyjádřením stejného problému je normálová síla, jejíž působiště je vůči těžišti umístěno na excentricitách  $e_z$  a  $e_y$ .

Kladná normálová síla na kladných excentricitách způsobuje momenty

$$M_y = Ne_z$$
$$M_z = -Ne_y$$

Normálové napětí je součtem napětí od jednotlivých vnitřních sil

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

Po dosazení za momenty dostaneme

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{Ne_z z}{I_y} - \frac{Ne_y y}{I_z}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{Ae_z z}{I_y} - \frac{Ae_y y}{I_z} \right)$$

využitím vztahu pro poloměr setrvačnosti  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  dostaneme

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e_z z}{i_y^2} - \frac{e_y y}{i_z^2} \right)$$

Pro rovnici neutrální osy platí  $\sigma_x = 0$ . Musí tedy být roven nule výraz v závorce.

Rovnice neutrální osy v průřezu je následující rovnice přímky

$$1 + \frac{e_z z}{i_y^2} - \frac{e_y y}{i_z^2} = 0$$

Její průsečík s osou  $y$  získáme, dosadíme-li za  $z$ -ovou souřadnici nulu.

$$y_N = -\frac{i_z^2}{e_y}$$

Obdobným způsobem získáme průsečík s osou  $z$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{e_z}$$

Úlohu můžeme také obrátit, tzn., že k neutrální ose dané průsečíky se souřadnými osami, hledáme působiště normálové síly

$$e_y = -\frac{i_z^2}{y_N}$$

$$e_z = -\frac{i_y^2}{z_N}$$

Neutrální osa rozděluje průřez na tlačnou a taženou část. Pokud jde neutrální osa mimo průřez, celý průřez je tažený nebo tlačný. Mezním stavem mezi těmito dvěma případy je neutrální osa dotýkající se průřezu. Pokud budeme klást neutrální osu do hran průřezu, tak aby neprocházela průřezem, působíště odpovídající těmto neutrálním osám vymezí tzv. jádro průřezu. Úsečka spojující získané body odpovídají otáčení neutrální osy kolem jádra průřezu. Pokud by normálová síla působila uvnitř jádra průřezu, celý průřez by byl tlačný nebo tažený. Body ohraničující jádro průřezu jsou excentricity působíště síly pro jednotlivé hraniční polohy neutrální osy:

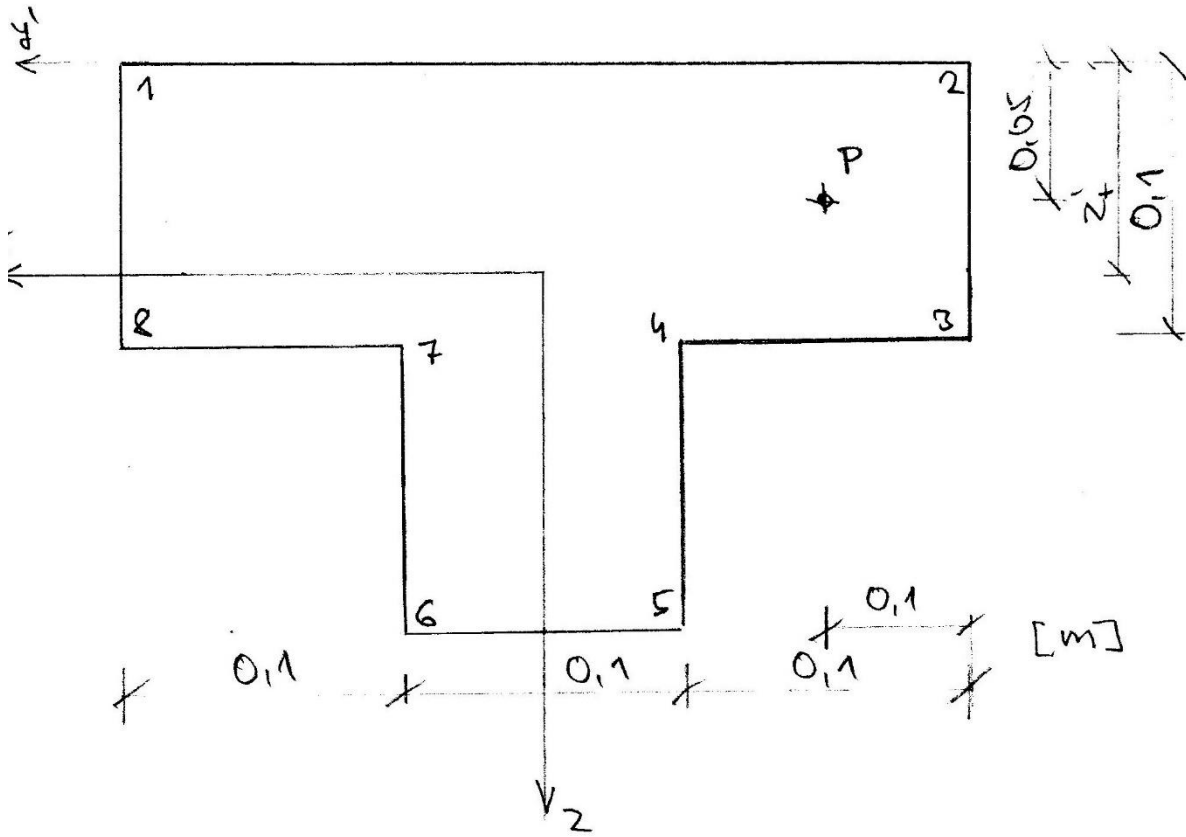
$$y_j = -\frac{i_z^2}{y_{Nj}}$$

$$z_j = -\frac{i_y^2}{z_{Nj}}$$

Pokud je ve jmenovateli  $\infty$ , tzn. neutrální osa je rovnoběžná se souřadnou osou, pak příslušná souřadnice jádra je rovna nule.

### příklad

Pro průřez na obrázku



1) nakreslete jádro průřezu

2) pro tlakovou sílu  $N=200$  kN působící v bodě P

a) vykreslete průběh napětí po obvodu průřezu

b) určete rovnici neutrální osy, zakreslete její polohu a zakótujte

### řešení

K řešení budeme potřebovat některé průřezové charakteristiky.

*průřezová plocha*

$$A = A_1 + A_2 = 0,3 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,04 \text{ m}^2$$

*těžiště průřezu*

Vzhledem k symetrii průřezu, leží z-ová osa uprostřed šířky průřezu.

Pro výpočet z-ové souřadnice těžiště můžeme průřez uvažovat součet dvou dílčích ploch  $A_1 + A_2$

Poloha těžiště vzhledem k horní hraně průřezu (pomocná osa  $y'$ )

$$z'_T = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A} = \frac{0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,15}{0,04} = 0,075 \text{ m}$$

*momenty setrvačnosti*

$$I_y = \frac{1}{12} (0,3 \cdot 0,1^3 + 0,1^4) + 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,025^2 - 0,1^2 \cdot 0,075^2 = 1,0833 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} (0,1 \cdot 0,3^3 - 0,1^4) = 2,3333 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

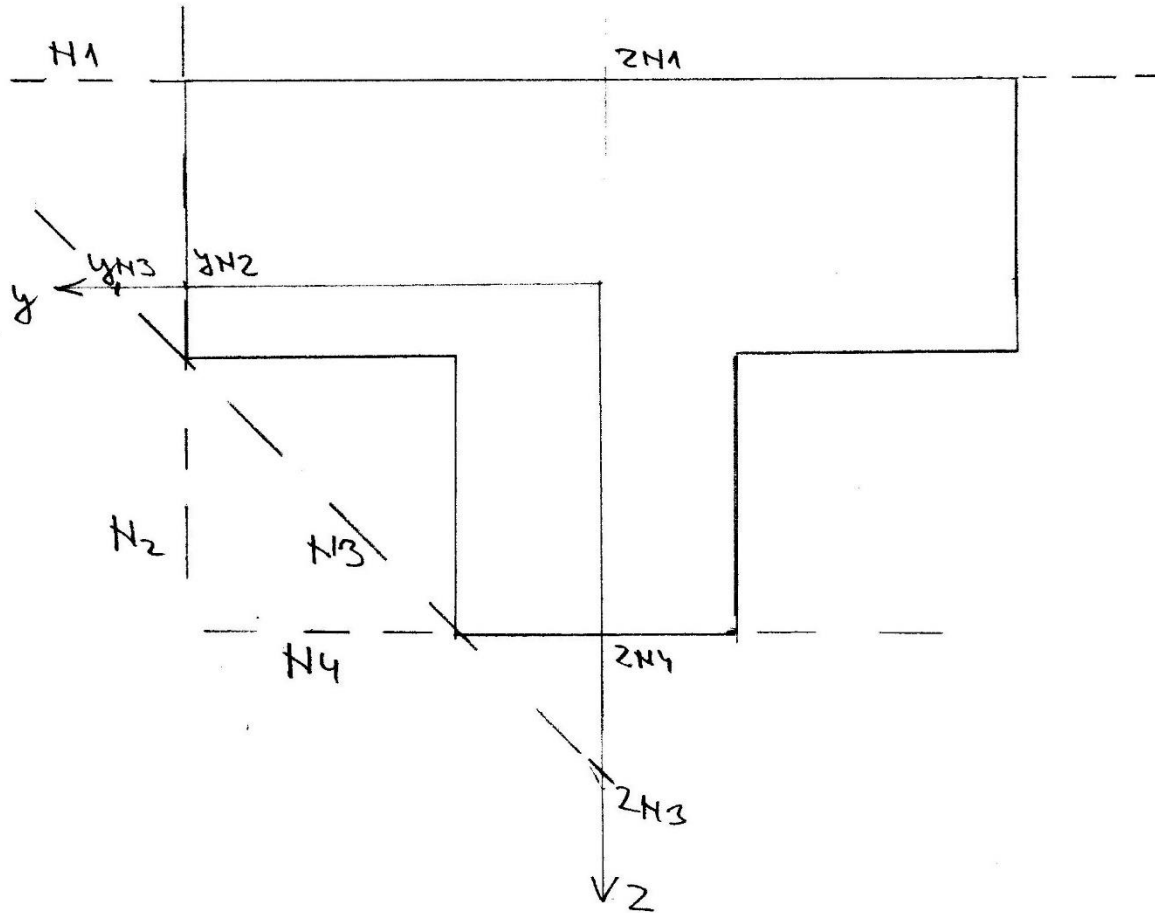
poloměry setrvačnosti

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{1,0833 \cdot 10^{-4}}{0,04} = 2,70825 \cdot 10^{-3} m$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{2,3333 \cdot 10^{-4}}{0,04} = 5,83325 \cdot 10^{-3} m$$

ad 1) Jádro průřezu

Body na obrysu jádra průřezu odpovídají neutrálním osám na obvodu průřezu. Abychom získali potřebné body, klademe neutrální osy do jednotlivých hran průřezu, případně spojujeme vrcholy obrysu tak, aby neutrální osa neprocházela průřezem.



1) Neutrální osu  $N1$  povedeme horní hranou tedy body 1 a 2  
Průsečík s osou  $y$  je v nekonečnu

$$y_{N1} = \infty$$

Tomu odpovídá  $y$ -ová souřadnice jádra průřezu

$$y_{j1} = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = -\frac{5,83325 \cdot 10^{-3}}{\infty} = 0 m$$

Průsečík s osou  $z$  má souřadnici

$$z_{N1} = -0,075 m$$

Z něj spočítáme  $z$ -ovou souřadnici jádra průřezu

$$z_{j1} = -\frac{i_y^2}{z_{N1}} = -\frac{2,70825 \cdot 10^{-3}}{-0,075} = 0,03611 m$$

2) Neutrální osu  $N2$  povedeme levou hranou tedy body 1 a 8

Průsečíky se souřadnými osami jsou

$$y_{N1} = -0,15m$$

$$z_{N1} = \infty$$

Tomu odpovídají souřadnice jádra průřezu

$$y_{j1} = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = -\frac{5,83325 \cdot 10^{-3}}{0,15} = -0,0388m$$

$$z_{j1} = -\frac{i_y^2}{z_{N1}} = -\frac{2,70825 \cdot 10^{-3}}{\infty} = 0m$$

3) Neutrální osu N3 nemůžeme vést další hranou (čili body 7 a 8) protože by procházela průřezem a tedy rozdělovala ho na taženou a tlačенou část. Využijeme tedy další bod a povedeme osu body 6 a 8.

Neutrální osa je pod úhlem 45° od vodorovné i svislé osy a její průsečíky se souřadnými osami stanovíme snadno z obrázku

$$y_{N1} = 0,175m$$

$$z_{N1} = 0,175m$$

Tomu odpovídají souřadnice jádra průřezu

$$y_{j1} = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = -\frac{5,83325 \cdot 10^{-3}}{0,175} = -0,03333m$$

$$z_{j1} = -\frac{i_y^2}{z_{N1}} = -\frac{2,70825 \cdot 10^{-3}}{0,175} = -0,01547m$$

4) Neutrální osu N4 vedeme dolní hranou body 5 a 6

Průsečíky se souřadnými osami jsou

$$y_{N1} = \infty$$

$$z_{N1} = 0,125m$$

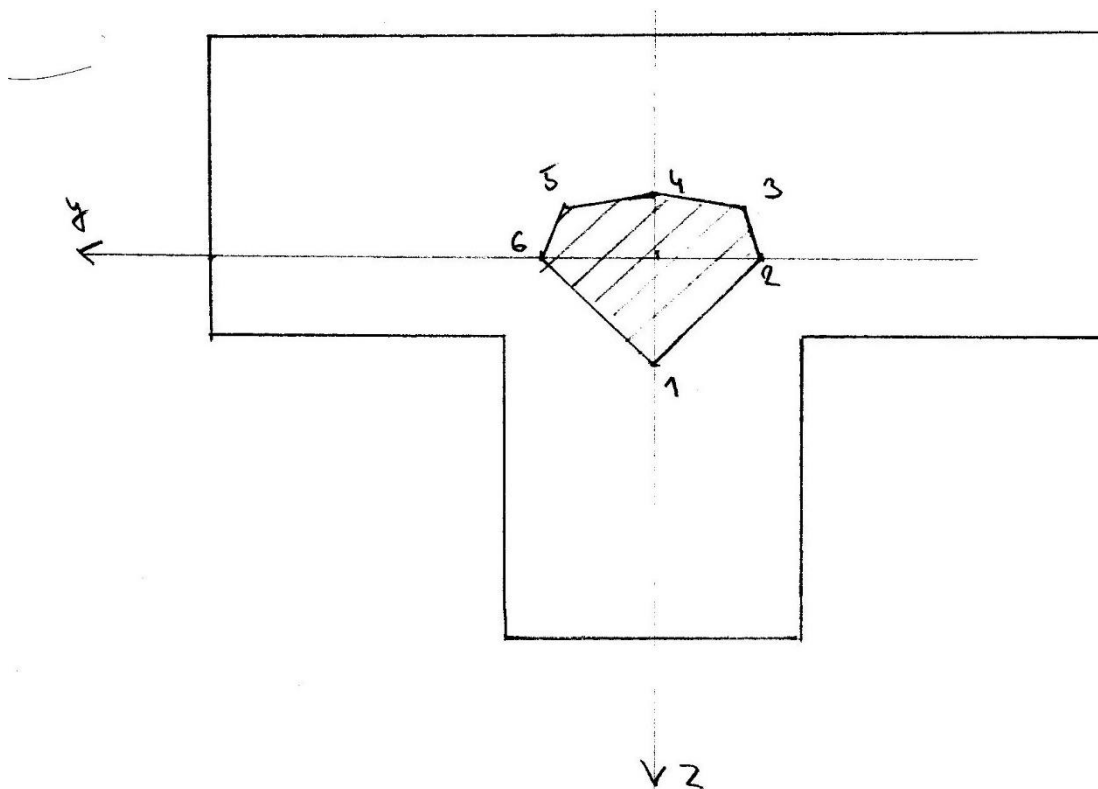
Tomu odpovídají souřadnice jádra průřezu

$$y_{j1} = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = -\frac{5,83325 \cdot 10^{-3}}{\infty} = 0m$$

$$z_{j1} = -\frac{i_y^2}{z_{N1}} = -\frac{2,70825 \cdot 10^{-3}}{0,125} = -0,02166m$$

Vzhledem k symetrii průřezu k ose z bude i jádro průřezu symetrické k ose z. Další dva body jádra průřezu 5 a 6 získáme symetricky k bodům 3 a 2.

Mezi získanými body jádra průřezu jsou leží další body na úsečkách spojující tyto body. Jednotlivé body úseček odpovídají neutrálním osám otáčejícím se kolem jednotlivých vrcholů v rozmezí použitých neutrálních os. Např. spojnice bodů jádra průřezu J1 a J2 odpovídají rotaci neutrální osy kolem bodu 1 mezi osami N1 a N2.



ad 2a) Normálové napětí

Uurčíme si souřadnice působíště síly vzhledem k souřadnému systému hlavních os setrvačnosti yz.

$$e_y = -0,1m$$

$$e_z = -0,025m$$

Excentricity působíště normálové síly využijeme pro stanovení ohybových momentů

$$M_y = Ne_z = -30 \cdot 10^3 \cdot (-0,025) = 0,75 \cdot 10^3 Nm$$

$$M_z = -Ne_y = -30 \cdot 10^3 \cdot (-0,1) = 3,0 \cdot 10^3 Nm$$

Normálové napětí je součtem napětí od jednotlivých vnitřních sil

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

Po dosazení za momenty dostaneme

$$\sigma_x = \frac{-30 \cdot 10^3}{0,04} + \frac{0,75 \cdot 10^3 z}{1,0833 \cdot 10^{-4}} - \frac{3,0 \cdot 10^3 y}{2,3333 \cdot 10^{-4}}$$

$$\sigma_x = 10^6 (-0,75 + 6,9233 z + 12,858 y)$$

Do vztahu postupně dosazujeme souřadnice y a z jednotlivých vrcholů na obrysu průřezu

$$\sigma_{x1} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (-0,075) + 12,858 \cdot (0,15)) = 0,659 \cdot 10^6 = 0,659 MPa$$

$$\sigma_{x2} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (-0,075) + 12,858 \cdot (-0,15)) = -3,198 \cdot 10^6 = -3,198 MPa$$

$$\sigma_{x3} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (0,025) + 12,858 \cdot (-0,15)) = -2,506 \cdot 10^6 = -2,506 MPa$$

$$\sigma_{x4} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (0,025) + 12,858 \cdot (-0,05)) = -1,220 \cdot 10^6 = -1,220 MPa$$

$$\sigma_{x5} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (0,125) + 12,858 \cdot (-0,05)) = -0,527 \cdot 10^6 = -0,527 MPa$$

$$\sigma_{x6} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (0,125) + 12,858 \cdot (0,05)) = 0,758 \cdot 10^6 = 0,758 MPa$$

$$\sigma_{x7} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (0,025) + 12,858 \cdot (0,05)) = 0,066 \cdot 10^6 = 0,066 MPa$$

$$\sigma_{x8} = 10^6 (-0,75 + 6,9233 \cdot (0,025) + 12,858 \cdot (0,15)) = 1,352 \cdot 10^6 = 1,352 MPa$$

V rovnici

$$\sigma_x = 10^6(-0,75 + 6,9233 z + 12,858 y)$$

položíme  $\sigma_x = 0$  a získáme rovnici neutrální osy

$$-0,75 + 6,9233 z + 12,858 y = 0$$

Průřezíky neutrální osy se souřadnými osami získáme dosazením postupně  $z=0$  a  $y=0$  do této rovnice nebo ze vztahů

$$y_N = -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{5,83325 \cdot 10^{-3}}{-0,1} = 0,05833m$$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{2,70825 \cdot 10^{-3}}{-0,025} = 0,10833m$$

Průběh napětí můžeme vykreslit na jednotlivých hranách pomocí hodnot v rozích. Průběhy na přímé hraně jsou vždy lineární.

Můžeme také pomocí průřezů neutrální osu vykreslit neutrální osa a kolmo na ni zobrazit pomocí nejvzdálenějších bodů na průřezu od této osy znovu lineární průběh. Na něj je pak možné promítnout zbývající body za zobrazit jejich hodnoty. Hodnoty napětí na obrázku jsou v MPa.

